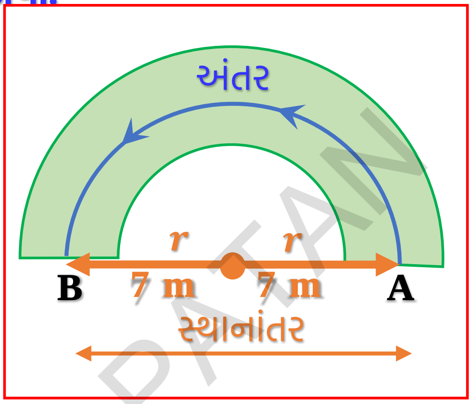
UNIT – 2

Circular Motion

વર્તુળાકાર ગતિ

Que. 01. અંતર અને સ્થાનાંતરની વ્યાખ્યા આપી સમજાવો.

Ans: ધારો કે એક વૃદ્ધ વ્યક્તિ અર્ધવર્તુળ ટ્રેક પર વહેલી સવારમાં “મોર્નિંગ વોક” કરી રહ્યા છે. આ ટ્રેકની ત્રિજ્યા 7 m છે. તો આ વ્યક્તિ જ્યારે A બિંદુએથી B બિંદુએ પહોંચે ત્યારે આ તેણે કાપેલું કુલ અંતર આ અર્ધવર્તુળના અર્ધ પરિઘ જેટલું થશે એટલે કે



વર્તુળનો અર્ધ પરિઘ

$$S = \frac{2\pi r}{2} = \pi r = \frac{22}{7} * 7 = 22\ m$$

વર્તુળનો વ્યાસ $D = 2r = 2 * 7 = 14\ m.$

આમ આ વ્યક્તિએ કાપેલું કુલ અંતર 22 m અને કરેલું સ્થાનાંતર 14 m થશે.

સ્થાનાંતર: ગતિ પથના બે બિંદુઓને જોડતી સીધી રેખામાં જોડીએ તો પદાર્થે કરેલું સ્થાનાંતર મળે છે.

અંતર: સમગ્ર ગતિ પથની કુલ લંબાઈને પદાર્થે કાપેલું કુલ અંતર કહે છે.

અંતર એ અદિશ રાશિ છે, જ્યારે સ્થાનાંતર એ સદિશ રાશિ છે.

અંતર હમેશા ધન હોય છે, જ્યારે સ્થાનાંતર ધન, ઋણ કે શુન્ય પણ હોઈ શકે છે.

Que. 02. ન્યુટનની ગતિનો પ્રથમ નિયમ સમજાવો અને તેના પરથી જડત્વની વ્યાખ્યા આપી સમજાવો.

Ans.: ન્યુટનની ગતિનો પ્રથમ નિયમ: કોઈ ભૌતિક પદાર્થ પર લાગતાં બળો તે પદાર્થની ગતિને શું અસર કરે તેનો ખ્યાલ પ્રથમ નિયમ આપે છે. જ્યારે પદાર્થ પર લાગતું બળ શુન્ય હોય ત્યારે તે પદાર્થ સ્થિર હશે તેવો નિષ્કર્ષ તારવી છીએ. પરંતુ જ્યારે ગતિમાન પદાર્થ પર લાગતું સમાસ બળ શુન્ય હોય ત્યારે પદાર્થ કેવી ગતિ કરશે?

“ જ્યારે પદાર્થ પર લાગતું ચોખ્ખું બાહ્ય બળ શુન્ય હોય ત્યાં સુધી સ્થિર પદાર્થ સ્થિર રહે છે અને ગતિમાન પદાર્થ પોતાની ગતિ જાળવી રાખે છે.”

જડત્વ: તમે જોયું હશે કે જ્યારે વૃક્ષને થડથી હલાવવામાં આવે છે ત્યારે વૃક્ષ પર રહેલા પર્ણો અને ફળો નીચે ખરી પડે છે. અથવા જ્યારે જૂના વપરાશમાં રહેલા કાર્પેટ (ગાલીચા) ને લટકાવી લાકડી વડે ઝાટકવામાં આવે ત્યારે તેમાં રહેલા ધૂળના રજકણો ઉડીને દૂર થાય છે.

- ન્યુટનની ગતિના પ્રથમ નિયમ અનુસાર, " જ્યાં સુધી પદાર્થ પર અસંતુલિત બાહ્ય બળ ન લગાડવામાં આવે ત્યાં સુધી સ્થિર પદાર્થ સ્થિર રહે છે અને ગતિમાન પદાર્થ પોતાની નિયત ઝડપ અને દિશા જાળવી રાખી સતત ગતિમાન રહે છે. "
- સરળ ભાષામાં કહીએ તો " ભૌતિક પદાર્થ જેવું કરતો હતો તેવું કરતો રહે છે."
- વાસ્તવમાં, પોતાની ગતિની અવસ્થા (સ્થિર કે ગતિમાન) નો વિરોધ કરવો એ ભૌતિક પદાર્થની મૂળભૂત લાક્ષણિકતા છે.
- ભૌતિક પદાર્થોની પોતાની ગતિ-અવસ્થાની વિરોધ કરવાની લાક્ષણિકતાને જડત્વ (Inertia) કહે છે.

Que. 03. જડત્વ અને તેના પ્રકારો ઉદાહરણ સાથે સમજાવો.

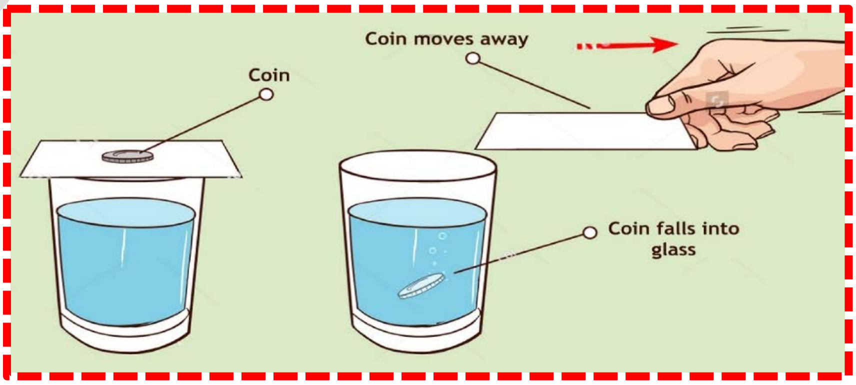
અથવા

Que. 03. દ્રવ્યમાન – જડત્વના માપનના પ્રમાણ તરીકે કેવી રીતે વર્તે છે તથા જડત્વના પ્રકારો ઉદાહરણ સાથે સમજાવો.

Ans.: તમામ પદાર્થો પોતાની ગતિ અવસ્થાનો વિરોધ કરે છે. આમ, તમામ ભૌતિક પદાર્થોનું એક સામાન્ય વલણ છે – જડત્વ. પરંતુ કેટલાક પદાર્થો બીજા પદાર્થો કરતાં પોતાની ગતિ-અવસ્થાનો વધુ કે ઓછો વિરોધ કરે છે. પદાર્થની પોતાની ગતિ-અવસ્થાનો વિરોધ કરવાની લાક્ષણિક્તા તે પદાર્થના દ્રવ્યમાન (Mass) પ્રમાણે બદલાય છે.

- દ્રવ્યમાન એવી ભૌતિક રાશિ છે જે એકંદરે તે પદાર્થના જડત્વ પર આધાર રાખે છે.
- જે પદાર્થનું જડત્વ વધારે તેમ તેનું દ્રવ્યમાન પણ વધારે હોય.
- જેમ દ્રવ્યમાન વધારે તેમ તે પદાર્થની પોતાની ગતિ-અવસ્થાનો વિરોધ કરવાની લાક્ષણિક્તા પણ વધારે.

સ્થિત જડત્વ (Static Inertia): સ્થિર સ્થિતમાં રહેલા પદાર્થની પોતાની સ્થિર સ્થિતિમાં બદલાવ કરવાની અક્ષમતાને પદાર્થનું સ્થિત જડત્વ કહે છે.

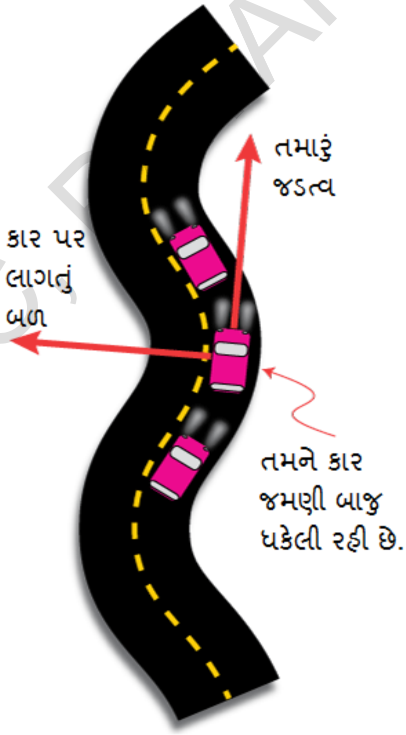


- ગ્લાસ પર મૂકેલા કાર્ડ પર રહેલો સિક્કો સ્થિત જડત્વ ધરાવે છે. અચાનક કાર્ડ ખસેડી લેતા કાર્ડ ગતિમાં આવે છે પરંતુ, સ્થિત જડત્વને કારણે સિક્કો સ્થિર રહેવા પ્રયત્ન કરે છે અંતે તે ગ્લાસમાં પતન પામે છે.

ગતિક જડત્વ (Dynamic Inertia): ગતિમાન અવસ્થામાં રહેલા પદાર્થની પોતાની ગતિ-અવસ્થામાં બદલાવ કરવાની અક્ષમતાને પદાર્થનું ગતિક જડત્વ કહે છે.

- રેસિંગ બાઇક ચાલક જો સેફટી-વોલ (નકામા ટાયરની બનેલી દીવાલ) સાથે અથડાઇ જાય તો ચાલક (પોતાના + બાઇક)ના ગતિક જડત્વને કારણે તે બાઇક પરથી ઊછળી આગળની બાજુએ ફંગોળાઇ જાય છે.

દિશાકીય જડત્વ (Directional Inertia): નિશ્ચિત ગતિમાર્ગે ગતિ કરતાં પદાર્થની પોતાની ગતિ-અવસ્થાની દિશામાં બદલાવ કરવાની અક્ષમતાને પદાર્થનું દિશાકીય જડત્વ કહે છે.



- તમે ક્યારેક અનુભવ્યું હશે કે જ્યારે કાર અચાનક ડાબી બાજુ તીવ્ર વળાંક લે તો તમે જમણી બાજુએ ધકેલાઇ જાઓ છો. તમને જમણી બાજુએ ધકેલાનારૂ આભાસી બળ આખરે શું છે અને તે ક્યાંથી ઉદભવે છે?
- તમારી કાર જ્યારે સીધા માર્ગે ગતિ કરી હોય ત્યારે તમારા શરીરના દિશાકીય જડત્વને કારણે તમે પણ સીધી દિશામાં (હેડલાઇટની દિશા) ગતિ કરી રહ્યા હોવ છો.
- પરંતુ જ્યારે કાર જ્યારે ડાબી બાજુએ તીવ્ર વળાંક લે તમારું શરીર દિશાકીય જડત્વને કારણે સીધા માર્ગે ગતિમાં રહેવા પ્રયત્ન કરે છે. આથી આખરે તમે જમણી બાજુએ ધકેલાઇ જાઓ છો.

Que. 04. વેગમાનની વ્યાખ્યા આપી તેનું સુત્ર લખી તેનો SI એકમ જણાવો.

Ans: વેગમાન: કોઈ ભૌતિક પદાર્થના વેગ અને તે પદાર્થના દ્રવ્યમાનના ગુણાકારને તે પદાર્થનું વેગમાન કહે છે.

$$P = m * v$$

MKS એકમ: $\rightarrow kg \cdot \frac{m}{s}$

CGS એકમ: $\rightarrow g \cdot \frac{cm}{s}$

Que. 04. બળના આઘાતની વ્યાખ્યા આપી તેનું સત્ર લખો અને તેનો SI એકમ લખો.

Ans: બળનો આઘાત: પદાર્થ પર લાગતું બળ $\vec{F}$ અને તે લાગતું હોય તે સમયગાળાના ગુણાકારને બળનો આઘાત કહે છે.

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$$

$$\text{બળનો આઘાત } (Impulse\ of\ force) = \vec{F}\cdot\Delta t = \Delta\vec{P} = m\Delta\vec{v} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

આમ, બળ અને તે બળના સંપર્ક સમયના મૂલ્યના ગુણાકારને બળનો આઘાત કહે છે અને તે એ પદાર્થના દ્રવ્યમાન અને વેગના ફેરફારના ગુણાકાર જેટલું હોય છે.

ઉપયોગ: બે કે તેથી વધુ પદાર્થોની અથડામણોનો (Collision) અભ્યાસ કરવા માટે સરેરાશ બળના આઘાતનું મૂલ્ય શોધવામાં આવે છે. પદાર્થોની અથડામણો દરમ્યાન પદાર્થોના દ્રવ્યમાન અને વેગમાં થતા ફેરફારો આસાનીથી શોધી શકાય છે પરંતુ, બળો શોધી શકાતાં નથી. આથી જો સંપર્ક સમય Δt મેળવી શકાય તો તેના પરથી બળનાં મૂલ્યો પણ શોધી શકાય છે.

ઉદાહરણ: જ્યારે ટેનિસબૉલ તેની ગતિ દરમિયાન રેકેટ સાથે અથડાય ત્યારે થોડીક ક્ષણો માટે જોડાયેલો રહે છે. આ સૂક્ષ્મ સમયગાળાને સંપર્કસમય (Δt) કહેવાય છે. જેટલા બળ વડે આ ટેનિસબૉલને ફટકારાવામાં આવે છે તે બળનું મૂલ્ય (F) આપે છે.

- આમ, $\vec{F}\cdot\Delta t = \Delta\vec{P}$ સમીકરણ મુજબ બળના આઘાત $\left(\vec{F}\cdot\Delta t\right)$ વડે ટેનિસ બૉલના વેગનું મૂલ્ય અને વેગની દિશા બંને બદલાય છે.
- આમ, ટેનિસ બૉલના વેગ અને તેની દિશામાં થતાં ફેરફાર અને ટેનિસ બૉલના દ્રવ્યમાન (mass)નો ગુણાકાર તેના વેગમાનના ફેરફારનું મૂલ્ય આપે છે, જે તેના પર લાગતાં બળના આઘાત જેટલું હોય છે.

Que. 05. વેગમાન સંરક્ષણનો નિયમ લખો અને ઉદાહરણ સાથે સમજાવો.

અથવા

વેગમાન સંરક્ષણના નિયમનું વિધાન લખો અને રાઈફલ અને બુલેટના ઉદાહરણ વડે સમજાવો.

Ans: ભૌતિક જગતમાં બે કે તેથી વધુ પદાર્થો આંતરક્રિયા કરતાં હોય ત્યારે વેગમાનની સંકલ્પના ઉપયોગી છે.

વિધાન: " અલગ કરેલા તંત્રનું કુલ વેગમાન અચળ રહે છે."

રાઈફલમાંથી છૂટેલી ગોળી જ્યારે આગળ જાય છે ત્યારે રાઈફલ પાછળ ધકેલાય છે. જો રાઇફલ વડે બુલેટ પર લાગતું બળ $\vec{F}$ હોય તો બુલેટ વડે રાઇફલ પર લાગતું બળ $-\vec{F}$ થાય. બુલેટ છૂટ્યા પહેલા રાઈફલ અને બુલેટ બંને સ્થિર છે. આથી તેમના પ્રારંભિક વેગમાન $\vec{P}_r$ અને $\vec{P}_b$ લેતાં,

$$\vec{P}_r + \vec{P}_b = 0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

રાઇફલમાંથી છૂટ્યા બાદ રાઇફલ અને ગોળીના વેગમાન અનુક્રમે $\vec{P_r}'$ અને $\vec{P_b}'$ લેતાં

હવે ન્યુટનની ગતિના બીજા નિયમ પરથી, બુલેટના વેગામાનમાં થતો ફેરફાર,

$$\vec{P_b}' - \vec{P_b} = \vec{F} \cdot \Delta t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

રાઇફલના વેગામાનમાં થતો ફેરફાર,

$$\vec{P_r}' - \vec{P_r} = -\vec{F} \cdot \Delta t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

સમીકરણ (2) અને (3) નો સરવાળો કરતાં,

$$\vec{P_b}' - \vec{P_b} + \vec{P_r}' - \vec{P_r} = \vec{F} \cdot \Delta t - \vec{F} \cdot \Delta t$$

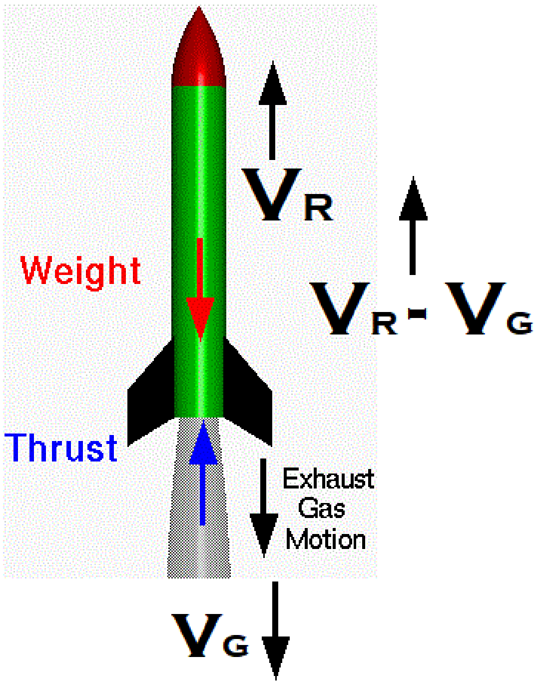
$$\vec{P_b}' - \vec{P_b} + \vec{P_r}' - \vec{P_r} = 0$$

$$\vec{P_b}' + \vec{P_r}' = \vec{P_r} + \vec{P_b}$$

(બુલેટ + રાઇફલ)નું અંતિમ વેગમાન = (બુલેટ + રાઇફલ)નું પ્રારંભિક વેગમાન

અહીં (રાઇફલ+બુલેટ) પર કોઈ બાહ્ય બળ લાગતું ન હોવાથી (રાઇફલ+બુલેટ) ના બનેલા તંત્રને અલગ કરેલું તંત્ર લઈ શકાય. અહીં (રાઇફલ+બુલેટ) ના બનેલા તંત્રમાં લાગતાં આંતરિક બળોની પરિણામી અસર શૂન્ય છે તે હકીકતને ધ્યાનમાં લેવામાં આવી છે. આ નિયમ મૂળભૂત અને સાર્વત્રિક છે આથી તારાઓ અને ગ્રહોના બનેલા તંત્રો માટે પણ લાગુ પાડી શકાય છે.

Que. 06. ન્યુટનની ગતિના ત્રીજા પરથી Payload લઇ જતારોકેટ માટે તેના મહત્તમ વેગનું સૂત્ર તારવો.



Ans: (અવકાશમાં ઉપગ્રહોને કે અવકાશ યાત્રીઓને લઈ જવા માટે રોકેટ વપરાય છે. રોકેટમાં ભરેલ બળતણ (Fuel) નું દહન થતાં દહનવાયુ ઉત્પન્ન થાય છે જે રોકેટના નોઝલમાંથી પ્રચંડ વેગથી બહાર ફેંકાય છે, પરિણામે ન્યુટનની ગતિના ત્રીજા નિયમ મુજબ વિરુધ્ધ દિશામાં પ્રત્યાઘાત લાગતાં રોકેટ ઉપરની દિશામાં ગતિ કરે છે. આપણે અહીં Single-stage Rocket ની ચર્ચા કરીશું.

ધારો કે દહન શરૂ થયા પહેલા રોકેટનું પ્રારંભિક દળ,

$$m_0 = m_{payload} + m_{fuel} + m_{body} \ldots\ldots\ldots.(1)$$

$m_{payload}$ એટલે જે ઉપગ્રહ અથવા કોઇ સમાન અવકાશમાં લઈ જવાનો છે તેનું દળ,

m_{fuel} એટલે રોકેટમાં દહન માટે ભરેલ (પ્રવાહી અથવા ઘન) બળતણનું દળ,

m_{body} એટલે રોકેટના અન્ય ભાગનું દળ.

ધારો કે કોઈ t સમયે રૉકેટનો વેગ V_r છે. રૉકેટમાં દહન થવાના કારણે ઉત્પન્ન થતાં દહન વાયુ રૉકેટની ગતિની વિરુધ્ધ દિશામાં ધકેલાય છે.

આમ, રૉકેટની સાપેક્ષે દહનવાયુ નો વેગ $= -V_G$

સ્થિર નિર્દેશ ફ્રેમ (પૃથ્વી) ની સાપેક્ષે રૉકેટનો વેગ $= V_r - V_G$

કોઈ સમય t, રૉકેટનું (દહન પામ્યા સિવાયના બળતણ સહિત) પ્રારંભિક વેગમાન $= mV_r$.

સૂક્ષ્મ સમય dt જેટલા સમયમાં રૉકેટના દળમાં (બળતણના દહનના કારણે) થતો ઘટાડો $= dm$

dt જેટલા સમયગાળા બાદ રૉકેટનું દળ $= m - dm$

આ dm જેટલું દ્રવ્યમાન ધરાવતા બળતણના દહનને કારણે રૉકેટના વેગમાં થતો વધારો $= dV_r$

આમ, dt જેટલા સમયગાળા બાદ રૉકેટનો વેગ $= V_r + dV_r$

આથી dt જેટલા સમયે પૃથ્વીની સાપેક્ષે રૉકેટનું વેગમાન,

$$P_r = (m - dm) \times (V_r + dV_r) \ldots\ldots\ldots (1)$$

દહનવાયુંનું વેગમાન,

$$P_G = dm \times \left(V_r - V_G\right) \ldots\ldots\ldots (2)$$

આથી dt જેટલા સમયે રૉકેટનું અંતિમ વેગમાન,

$$\therefore P_r + P_G = [(m - dm) \times (V_r + dV_r)] + dm \times \left(V_r - V_G\right)$$

$$\therefore P_r + P_G = mV_r + mdV_r - V_r dm - dmdV_r + V_r dm - V_G dm$$

$$\therefore P_r + P_G = mV_r + mdV_r - V_G dm \ldots\ldots\ldots (3)$$

અહીં $dmdV_r$ એ પદ મૂલ્યની દ્રષ્ટિએ અંત્યંત નાનું હોવાથી અવગણ્યું છે.

રૉકેટ પર કોઈ બાહ્ય બાલ ન લાગતું હોવાથી વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમ મુજબ,

રૉકેટનું પ્રારંભિક વેગમાન $=$ રૉકેટનું અંતિમ વેગમાન

$$\therefore mV_r = mV_r + mdV_r - V_G dm$$

$$\therefore mdV_r = V_G dm$$

$$\therefore\ m\frac{dV_r}{dt} = -V_G\frac{dm}{dt}\ \ldots\ldots\ldots(4)$$

અહીં બળતણના દહનને કારણે રૉકેટનું દ્રવ્યમાન સતત ઘટતું હોવાથી $\frac{dm}{dt}$ ની નિશાની ઋણ લીધેલ છે.

$$\frac{dV_r}{dt} = a\ (\text{રૉકેટનો પ્રવેગ})$$

ન્યુટનની ગતિના બીજા નિયમ મુજબ, $F = ma$ પરથી,

$$\therefore\ m\frac{dV_r}{dt} = F_{thrust} = -V_G\frac{dm}{dt}\ \ldots\ldots\ldots(5)$$

F_{thrust} ને રૉકેટનો થ્રસ્ટ (ધક્કો) કહે છે. થ્રસ્ટ વધારવા દહનવાયુંનો વેગ અથવા બળતણના દહનનો દર વધારવો જોઇએ.

સમીકરણ (4) પરથી,

$$-\frac{dm}{m} = \frac{dV_r}{V_G}\ \ldots\ldots\ldots(6)$$

રૉકેટના લૉન્ચિંગ સમયે પ્રારંભિક દ્રવ્યમાન $= m_0$

રૉકેટના લૉન્ચિંગ સમયે પ્રારંભિક વેગ $= 0$

જ્યારે રૉકેટનું m જેટલું દ્રવ્યમાન બાકી રહે તે સમયે રૉકેટનો વેગ V હોય તો સમી. (6) નું સંકલન લેતાં,

$$-\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} = \int_{0}^{V}\frac{dV_r}{V_G}$$

$$\therefore\ V = V_G\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)\ldots\ldots\ldots(7)$$

સમીકરણ (1) પરથી,

$$m_0 = m_{payload} + m_{fuel} + m_{body}$$

જ્યારે રૉકેટનું સમગ્ર બળતણ વપરાઇ જાય ત્યારે રૉકેટનો વેગ મહત્તમ બનશે.

$$m = m_{payload} + m_{body}$$

આ કિંમતો સમીકરણ (7) માં મૂકતાં,

$$\therefore\ V_{max} = V_G\ln\left(\frac{m_{payload} + m_{fuel} + m_{body}}{m_{payload} + m_{body}}\right)$$

$$\therefore\ V_{max} = V_G\ln\left(\frac{m_{fuel}}{m_{payload} + m_{body}} + 1\right)\ldots\ldots\ldots(8)$$

ઉપરોક્ત સમીકરણ એ Payload લઈ જતાં રૉકેટના મહત્તમ વેગ માટેનું સૂત્ર છે. આ સમીકરણની તારવણી કરવા માટે ગુરુત્વાકર્ષણ બળ તેમજ હવાનું ઘર્ષણબળ જેવાં બળને ગણતરીમાં લીધેલ નથી. રૉકેટના મહત્તમ વેગ માટે $\frac{m_{fuel}}{m_{payload}+m_{body}}$ ગુણોત્તર વધુ રહેવો જોઇએ.

Que. 07. નિયત ત્રિજ્યા ધરાવતા વર્તુળાકાર માર્ગે ગતિ કરતા પદાર્થ દ્વારા આંતરવામાં આવતા ખૂણા અને ચાપનો સંબંધ દર્શાવતું સમીકરણ તારવો.

Ans: ધારો કે કોઇ એક પદાર્થ r ત્રિજ્યા ધરાવતા વર્તુળાકાર માર્ગે ગતિ કરી રહ્યો છે. કોઇ સમય t_1 સંદર્ભરેખાની સાપેક્ષે તેનું કોણીય સ્થાન θ_i છે જ્યારે t_2 સમયે તેનું સ્થાન θ_f છે.

કોણીય સ્થાનાંતર: *વર્તુળાકાર ગતિમાં કોઇ નિયત બિંદુની સાપેક્ષે આપેલ પદાર્થ માટે અંતિમ અને પ્રારંભિક સ્થાન વચ્ચેના ખૂણાને તે પદાર્થનું તે સમયનું કોણીય સ્થાનાંતર કહે છે.*

$$\theta = \theta_f - \theta_i \dots\dots\dots(1)$$

અહીં પદાર્થ $\Delta t = t_2 - t_1$ જેટલા સમયમાં વર્તુળાના ચાપ (Arc) S જેટલું અંતર કાપે છે. આથી પદાર્થે Δt જેટલા સમયમાં સંદર્ભરેખા સાથે આંતરેલો ખૂણો,

$$\theta = \frac{Arc}{Radius} = \frac{\text{ચાપ}}{\text{ત્રિજ્યા}} = \frac{S}{r} \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\therefore S = r \cdot \theta \quad \dots\dots\dots(3)$$

પદાર્થ જ્યારે કોઇ નિશ્ચિત બિંદુથી શરૂ કરીને તે જ બિંદુએ પાછો આવે ત્યારે તેણે કાપેલું અંતર,

$$\theta = \theta_f - \theta_i = 2\pi - 0 = 2\pi$$

આ મુલ્યને સમીકરણ (3) માં મુકતાં,

$$S = r \cdot 2\pi = 2\pi r$$

Que. 08. વર્તુળાકાર માર્ગે ગતિ કરતા પદાર્થ માટે સાબિત કરો કે $\pi\ (Rad) = 360^\circ$

Ans: વર્તુળાકાર માર્ગે ગતિ કરતા પદાર્થે Δt જેટલા સમયમાં સંદર્ભરેખા સાથે આંતરેલો ખૂણો,

$$\theta = \frac{Arc}{Radius} = \frac{\text{ચાપ}}{\text{ત્રિજ્યા}} = \frac{S}{r}$$

$$\therefore S = r \cdot \theta$$

પદાર્થ જ્યારે કોઇ નિશ્ચિત બિંદુથી શરૂ કરીને તે જ બિંદુએ પાછો આવે ત્યારે તેણે કાપેલું અંતર,

$$\theta = \theta_f - \theta_i = 2\pi - 0 = 2\pi$$

આ મુલ્યને સમીકરણ (3) માં મુકતાં,

$$S = r \cdot 2\pi = 2\pi r$$

આ પૂર્ણ પરિભ્રમણ દરમિયાન તેણે આંતરેલો ખૂણો,

$$\theta = 360°$$

ઉપરોક્ત બંને કિંમતો સમી. (3) માં મૂકતાં,

$$\therefore 2\pi r = r(360°)$$

$$\therefore 2\pi = 360°$$

$$\therefore \boldsymbol{\pi = 180°}$$

વર્તુળાકાર ગતિમાં કોણીય સ્થાનાંતર (ખૂણો) Radian (રેડિયન) એકમમાં માપવામાં આવે છે.

<u>માત્ર ગણતરી માટે: (યાદ રાખો)</u>

<u>ડિગ્રી (D) અને રેડિયન (R)નું એકબીજામાં રૂપાંતર</u>

$$D \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180°}} R \qquad R \xrightarrow{\times \frac{180°}{\pi}} D$$

Que. 10. કોણીય વેગની વ્યાખ્યા આપી તેનું સૂત્ર લખો અને તેનો એકમ લખો.

Ans: કોણીય વેગ: વર્તુળાકાર માર્ગે ગતિ કરતો પદાર્થ એકમ સમયમાં જો θ જેટલું કોણીય સ્થાનાંતર કરે તેને પદાર્થનો કોણીય વેગ કહે છે.

ધારો કે પદાર્થ t જેટલા સમયમાં θ જેટલું કોણીય સ્થાનાંતર કરે તો તેનો કોણીય વેગ,

$$\omega = \frac{\text{કોણીય સ્થાનાંતર}}{\text{સમય}} = \frac{\theta}{t}$$

કોણીય વેગનો એકમ $[\omega]: \rightarrow \frac{rad}{s}$

Que. 11. r ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર માર્ગે ગતિ કરતા પદાર્થ માટે તેના કોણીય વેગ અને રેખીય વેગનો સંબંધ દર્શાવતું સમીકરણ તારવો.

અથવા

r ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર માર્ગે ગતિ કરતા પદાર્થ માટે $v = r\,\omega$ સમીકરણ તારવો.

Ans: રેખીય વેગની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$$v = \frac{Distance}{time} = \frac{\text{અંતર}}{\text{સમય}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

વર્તુળાકાર માર્ગે ગતિ કરતો પદાર્થ $\Delta t = t_2 - t_1$ જેટલા સમયમાં વર્તુળના ચાપ ΔS જેટલું અંતર કાપે છે અને તે $\Delta\theta$ જેટલો ખૂણો આંતરે છે.

ચાપના સમીકરણ અનુસાર,

$$\therefore \Delta S = r \cdot \Delta\theta$$

આ સમીકરણને બંને બાજુએ Δt વડે ભાગતાં,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{r \cdot \Delta\theta}{\Delta t}$$

સમીકરણ (1) પરથી, વેગની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$$\therefore v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{r \cdot \Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\therefore v = r\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

હવે કોણીય વેગની વ્યાખ્યા પરથી,

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\therefore v = r\omega$$

આમ, વર્તુળાકાર માર્ગે ગતિ કરતા પદાર્થનો રેખીય વેગ એ તે વર્તુળની ત્રિજ્યા ને તેના કોણીય વેગના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

Que.12. કેન્દ્રગામી પ્રવેગનું સૂત્ર તારવો.

અથવા

કેન્દ્રગામી પ્રવેગ અને રેખીય વેગનો સંબંધ દર્શાવતું સમીકરણ તારવો અને તેનો એકમ લખો.

અથવા

r ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર માર્ગે ગતિ કરતા પદાર્થ માટે $a_c = \frac{v^2}{r}$ સમીકરણ તારવો અને તેનો એકમ લખો.

અથવા

r ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર માર્ગે ગતિ કરતા પદાર્થ માટે $a_c = r\omega^2$ સમીકરણ તારવો અને તેનો એકમ લખો.

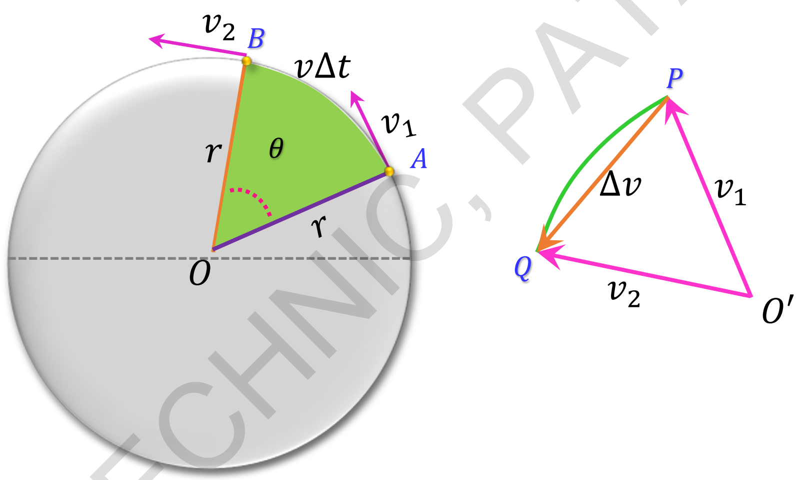
Ans: વર્તુળાકાર ગતિ કરતા પદાર્થના રેખીય વેગની દિશા સતત બદલાતી રહે છે આથી, વર્તુળાકાર ગતિ એ નિયમિત પ્રવેગી ગતિ છે એમ કહી શકાય.

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કોઇ એક પદાર્થ r ત્રિજ્યા ધરાવતા વર્તુળમાર્ગે નિયત અચળ વેગથી વર્તુળગતિ કરી રહ્યો છે. વર્તુળને દોરેલ સ્પર્શક એ તે બિંદુએ પદાર્થનો રેખીય વેગની દિશા દર્શાવે છે. બિંદુ A પાસે વેગ v_1 અને બિંદુ B પાસે વેગ v_2 છે.

પદાર્થ Δt જેટલા સમયમાં v જેટલા વેગથી ચાપ $\widehat{AB}$ જેટલું અંતર કાપે છે. વેગની વ્યાખ્યા પરથી,

$$\text{વેગ} = \frac{\text{અંતર}}{\text{સમય}} \rightarrow v = \frac{\widehat{AB}}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = v \cdot \Delta t$$



અહીં $\Delta\, OAB \cong \Delta\, O'PQ$

હોવાથી,

$$\frac{AB}{OA} = \frac{PQ}{O'P}$$

$$\therefore \frac{v \cdot \Delta t}{r} = \frac{\Delta v}{v_1}$$

વર્તુળગતિ માટે અચળ વેગથી

ગતિ કરતાં પદાર્થના વેગની માત્ર દિશા જ બદલાય છે, આથી $v_1 = v_2 = v$

$$\therefore \frac{v \cdot \Delta t}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

$$\therefore \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

હવે પ્રવેગની વ્યાખ્યા પરથી,

$$\text{પ્રવેગ } a = \frac{\text{વેગ}}{\text{સમય}}$$

$$\boxed{\therefore a_c = \frac{v^2}{r}}$$

પદાર્થનો રેખીય વેગ,

$$v = r\omega$$

$$\therefore a_c = \frac{(r\omega)^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r}$$

$$\therefore a_c = r\omega^2$$

કેન્દ્રગામી પ્રવેગ એકમ: m/s^2

Que. 13. કેન્દ્રગામી બળનું સૂત્ર લખો અને તેનો એકમ જણાવો.

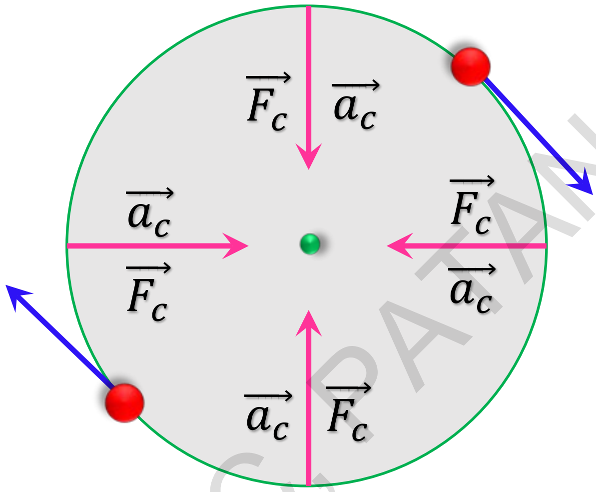
Ans: ન્યુટનની ગતિના બીજા નિયમ મુજબ,

$$F = ma$$

વર્તુળગતિ કરતાં પદાર્થ માટે કેન્દ્રગામી પ્રવેગ,

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

$$\therefore F_C = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$$



કેન્દ્રગામી બળ એ પદાર્થની નિયમિત અચળ પ્રવેગી ગતિ માટે જવાબદાર છે.

વર્તુળગતિમાં પદાર્થનો વેગ અને અંતર હંમેશા અચળ રહે છે આથી કેન્દ્રગામી બળનું મૂલ્ય પણ અચળ રહે છે. માત્ર વેગની દિશા સતત બદલાતી હોવાથી કેન્દ્રગામી બળની દિશા પણ સતત બદલાતી રહે છે પરંતુ કેન્દ્રગામી બળની દિશા હંમેશા કેન્દ્ર તરફ રહે છે.

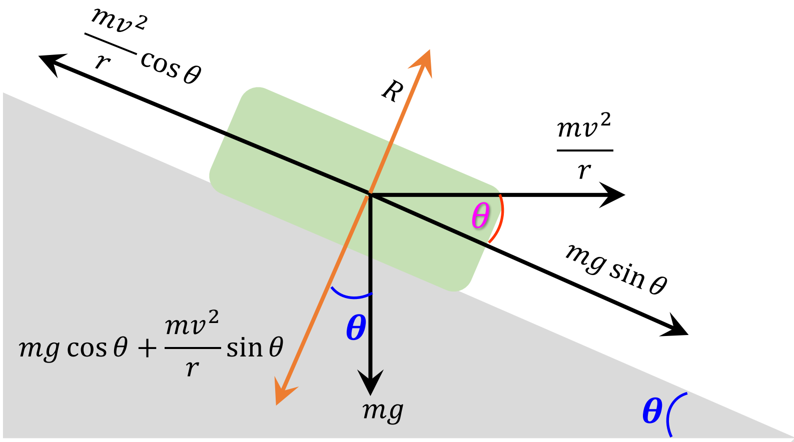
કેન્દ્રગામી બળનો એકમ: $\frac{kg\cdot m}{s^2} = N$

ઉદાહરણ:

1. ચકડોળ
2. પૃથ્વીની ગતિ
3. હીંચકાની ગતિ
4. વોશિંગ મશીનની ગતિ

Que. 14. r ત્રિજ્યાના વળાંક ધરાવતા અને θ જેટલો ઢોળાવ ધરાવતા રોડ પર v જેટલા નિયમિત ઝડપથી ગતિ કરતા વાહન માટેના ઢોળાવનું સૂત્ર $tan\theta = \frac{v^2}{rg}$ તારવો. આ ઉપરથી વાહનની મહત્તમ ઝડપનું સૂત્ર $v_{max} = \sqrt{\mu_s rg}$ તારવો.

Ans: વળાંક વાળા રસ્તા રોડ પર ગતિ કરતું વાહન જ્યારે વળાંક લે ત્યારે વાહન લપસી જવાની સંભાવના રહે છે. આથી સલામત વળાંક લેવા વાહન કેન્દ્રગામી પ્રવેગ જરૂરી છે. આથી વળાંકવાળા રસ્તાને ઢોળાવ આપીને કેન્દ્રગામી બળ પુરું પાડવામાં આવે છે. ઢોળાવવાળા રસ્તાઓને કારણે વાહન લપસી જવાની સંભાવના ઘણી ઓછી થઇ જાય છે.



ધારો કે m જેટલું દ્રવ્યમાન ધરાવતું એક વાહન v જેટલી ઝડપથી એક r ત્રિજ્યા ધરાવતા રોડ પરથી પસાર થઇ રહ્યું છે. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ રોડનો સમક્ષિતિજ સાથે ઢોળાવ θ છે.

વાહનના દ્રવ્યમાનને કારણે ઉત્પન્ન થતું વજનબળ mg હંમેશા નીચેની દિશા તરફ લાગે છે અને કેન્દ્રગામી બળ કેન્દ્ર તરફ લાગે છે. આ બંને બળોના સમક્ષિતિજ અને ઉર્ધ્વ(લંબ) ઘટકો તથા વાહનની સપાટીને લાગતું લંબબળ N એ એકબીજાને સમતુલ્ય હોય છે.

કેંદ્રગામી બળનો સમક્ષિતિજ ઘટક = વજનબળનો સમક્ષિતિજ ઘટક

$$\therefore \frac{mv^2}{r}\cos\theta = mg\sin\theta \;\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\therefore \frac{v^2}{rg} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$\boxed{\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right)}$$

ઉપરોક્ત સમીકરણ એ રસ્તા માટે જરૂરી ઢોળાવનું મૂલ્ય આપે છે.

અહીં સમીકરણ જોતાં જણાય છે કે

1. ઢોળાવ એ વાહનના દ્રવ્યમાન m પર આધાર રાખતો નથી.
2. જેમ રસ્તા પર સલામત ઝડપનું મૂલ્ય વધારવું હોય તો ઢોળાવનું મૂલ્ય પણ વધારવું જોઈએ.

m દ્રવ્યમાન ધરાવતા વાહને r ત્રિજ્યાના સમક્ષિતિજ માર્ગ પર v જેટલી સલામત ઝડપથી ગતિ કરવી હોય તો વાહનને

$$F_c = \frac{mv^2}{r}$$

જેટલું કેન્દ્રગામી બળ મળવું જ જોઇએ.

રોડ અને ટાયર વચ્ચે લાગતું ઘર્ષણબળ (Friction force)

$$F_f = \mu_s mg$$

જ્યાં μ_s એ રોડ અને ટાયર વચ્ચેનો ઘર્ષણાંક (Coefficient of static friction) છે.

રોડ અને ટાયર વચ્ચે લાગતું ઘર્ષણબળ એ કેન્દ્રગામી બળ કરતાં વધુ હોય છે.

$$\mu_s mg > \frac{mv^2}{r}$$

જો વાહનની મહત્તમ સલામત ઝડપ v_{max} રાખવી હોય તો,

$$\therefore \frac{m{v_{max}}^2}{r} = \mu_s mg$$

$$\therefore {v_{max}}^2 = \mu_s rg$$

$$\boxed{\therefore v_{max} = \sqrt{\mu_s rg}}$$

યાદ રાખો: મહત્તમ સલામત ઝડપ એ વાહન કે પેસેન્જરના દ્રવ્યમાન m પર આધાર રાખતી નથી.

આ ઉપરાંત ઘર્ષણબળનું મૂલ્ય દરેક પ્રકારના રોડ માટે અલગ અલગ હોય છે આ ઉપરાંત ઘર્ષણબળનું મૂલ્ય વધુ અનિશ્ચિત હોવાથી v_{max} ઝડપથી વધુ ઝડપે મુસાફરી કરવી અતિશય જોખમ ભરેલી છે.

Que. 15. r ત્રિજ્યાના વળાંક ધરાવતા રોડ પર v જેટલા નિયમિત ઝડપથી ગતિ કરતા સાયકલ સવાર માટે સાયકલના નમનનું સૂત્ર $tan\theta = \frac{v^2}{rg}$ તારવો.

Ans: વળાંકવાળા રસ્તાઓ પરથી વળાંક લેતી વખતે ઘર્ષણબળ પરનો આધાર ઓછો કરવા માટે સાઇકલને ઉર્ધ્વ સ્થિતિથી થોડું અંદરની બાજુએ નમવું પડે છે. આમ કરવાથી જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ મળી રહે છે.

ધારો કે,

સાઈકલસવારનું દળ $= m$

સાઇકલસવારની ઝડપ $= v$

વર્તુળાકાર માર્ગની ત્રિજ્યા $= r$

ઉર્ધ્વ દિશા સાથે નમનનો ખૂણો $= \theta$

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ સાઇકલસવારનું વજનબળ નીચેની તરફ લાગે છે. સાઇકલસવાર ઉર્ધ્વદિશા સાથે નમનનો ખૂણો પર લાગતાં લંબબળ.

સાઇકલસવાર પર લાગતાં લંબબળને બે ઘટકોમાં વિભાજિત કરી શકાય છે. તેનો સમક્ષિતિજ ઘટક એ જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડે છે.

$$\therefore R\sin\theta = \frac{mv^2}{r} \dots\dots\dots (1)$$

લંબબળનો ઊર્ધ્વ ઘટક એ સાઇકલસવારના વજનબળને સમતુલ્ય હોય છે.

$$\therefore R\cos\theta = mg \dots\dots\dots (2)$$

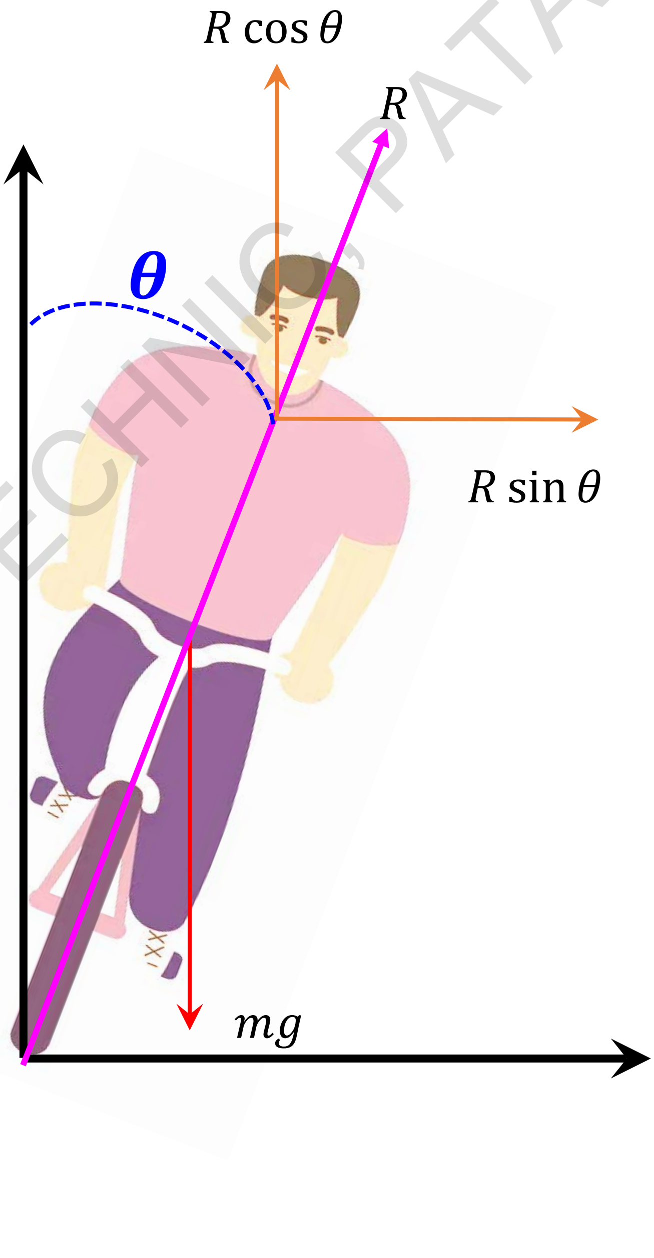
સમી.(1) અને (2) નો ગુણોત્તર લેતાં,

$$\therefore \frac{R\sin\theta}{R\cos\theta} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg}$$

$$\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{mv^2}{mrg}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$\boxed{\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right)}$$



અહીં સમીકરણ જોતાં જણાય છે કે

1. નમન એ સાઇકલસવારના દ્રવ્યમાન m પર આધાર રાખતું નથી.
2. જેમ રસ્તા પર સલામત ઝડપનું મૂલ્ય વધારવું હોય તો નમનનું મૂલ્ય પણ વધારવું જોઈએ.